

宇宙科学 (柴田大教官) 試験対策プリント

担当: 理一9組佐々木晃逸
連絡先: g440278@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp

§0 この試験対策プリントについて(当然試験範囲外)

柴田教官の授業では素晴らしいプリントが既に配布されているため、このプリントの構成についてはやや悩んだところである。

このプリントでは、教官が配布したプリントにかかれていないが授業中には説明していた事柄や、計算過程などを付け加え、覚えやすいような形でまとめようと思う。なお、9組向けに作っているの、高校物理の内容はそれほど詳しくは解説しない場合がある。

いくらシケプリとはいえ、理一にほぼ最低点で合格した僕のプリントだけで勉強するのは危険極まりないと思うので、教官が配布したプリントを持っていない人がいれば、それをしっかり入手した上で(入手のあてがなければ僕が貸します)、教官のプリントも重視して勉強しましょう。

あと、各種定数の値についてですが、電気素量や光速度的ように、高校時代から当然のように覚えてきた数値については覚えておいたほうが良いと思いますが、それ以外の具体的な数値は覚えなくても良いと思います(宿題が出されたときも、数値はプリントを参考にとかかれていました)。

§1 宇宙の階層構造の概観

§1.1 自然界に働く力

重力: 天体は重力によって束縛されて構成されている

電磁気力: 原子・分子・高分子・細胞・生命体・石・岩・水・人間等、身の回りの物質は電磁気力の束縛を受ける。

強い相互作用 原子核、核子自身を構成する力

弱い相互作用

§1.2 宇宙を考える上での基本単位・記号

天文単位 AU: 地球の公転軌道半径

光年: 光が一年間に進む距離

パーセク pc: 年周視差一秒角 (§2で解説)

エルグ erg: $1\text{J}=10^7\text{erg}$

万有引力定数 G: 万有引力 $F=GMm/r^2$

光速 c

プランク定数 h: $E=h\nu$ (振動数 ν の波の運動エネルギーは E)

ボルツマン定数 k_B

電気素量 e

クーロン力の比例定数 k_e : クーロン力 $F=k_e q_1 q_2 / r^2$

陽子質量 m_p

電子質量 m_e

ボーア半径 a_0 : 水素原子の最小軌道半径 $a_0 = h^2 / 4\pi^2 m_e k_e e^2$

プランク質量 m_p : $m_p = (hc/2g)^{1/2}$

プランク長 l_p : $l_p = (Gh/2c^3)^{1/2}$

§1.3 宇宙の構成要素

・**太陽系**: 太陽は水とほぼ同じ密度。

・**白色矮星**: 死んだ星。ex) 球状星団 M4 詳しくは §5 で

・**中性子星**: 超新星爆発後に形成される高密度の星。詳しくは §5 で

・**ブラックホール**: 大変重い。恒星の進化の最後に形成。詳しくは §5 で

・**星団 散開星団**: 円盤・渦巻き。若い恒星。軽い。

ex) プレアデス: 我々から 130pc の距離
NGC2244

球状星団: 古く、高密度。年老いた星団。

ex) M15: 数 pc 内に 10~100 万個の恒星
我々から約 1 万 pc の距離

Cen

詳しくは §5 で

われわれの銀河系: 中心は超巨大ブラックホール(太陽質量の約 260 万倍)。まわりを恒星が高速で運動。

・銀河の上の階層: **局所銀河群**。我々の銀河(Milky Way)も局所銀河群の一員。近傍にはアンドロメダ銀河という渦巻き銀河系。約 70 万 pc で、徐々に我々に近づいている。

・局所銀河群の上の階層: **銀河団**。われわれにとって最も近隣の銀河団はおとめ座銀河団。

§2 宇宙論的距離の測定法

§2.1 距離梯子 (レーダー測距)

・**レーダー測距**: 金星などの地球近傍の惑星、衛星が対象。

理由: 遠方の天体に対しては、レーダー光が、拡散により検出不可能な光量でしか地球に戻ってこないから。

・方法: レーダーパルスの往復時間から距離を算出する。

計算式 $r = c\Delta t$ (c : 光速)

・応用例

$$1) \text{ 地球の公転軌道半径 } a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

(天文単位の定義 $a = 1AU$)

(r_1, r_2 : 地球と金星の距離の最大値と最小値)

$$2) \text{ 金星の公転軌道半径 } b = \frac{r_2 - r_1}{2}$$

3) 太陽質量

$$G \frac{Mm}{a^2} = ma \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \Rightarrow M = \frac{a^3}{G} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

(m : 地球の質量、 T : 地球の公転軌道周期(1年))

・太陽エネルギーについて

地球軌道半径上で太陽から受け取るエネルギーは、約 $1.95 \text{ カロリー}/\text{cm}^2/\text{分}$

である。これに $4\pi a^2$ (a を半径とする球の表面積) をかけると、単位時間当たりの太陽エネルギーが求められる。

約 $3.85 \times 10^{26} \text{ J/s}$

§2.2 距離梯子 (三角測量)

・**三角測量**: 近傍の恒星が対象。数百 pc まで。

理由: (下で定義)が 0.01 秒以下のとき、現在の技術では精度が落ちるから。

・**年周視差**: 地球の公転によって生じる、天球上の恒星の位置の半年間での角度のずれを 2θ と定義する。

・方法: 年周視差と三角関数の近似を用いる。

$$\text{計算式 } \tan \theta = \frac{a}{d} \quad (a: \text{地球公転半径}, d: \text{求める距離})$$

$$a \ll d \text{ より近似して、 } d \approx \frac{a}{\theta}$$

近似するとき はラジアン単位であることに注意
単位換算 1 秒 = 1/3600 度

§2.3 距離梯子 (HR図)

・HR図による距離測定: 1 kpc までの恒星対象。銀河内。

理由: 遠方からの光が途中で吸収・散乱されて色が変わってしまう、同じ星であるか判別するのが難しいから。

・方法: 恒星が放射するエネルギーの波長分布は黒体放射のスペクトルの波長分布で近似でき、単位面積、単位立体角、単位時間あたりのエネルギー流量 B は

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad (\text{注 } \exp x = e^x)$$

(ν : 光の周波数、 h : プランク定数、 k_B : ボルツマン定数)とあらわされることが分かっている。つまり、 B は T の関数であらわされる。なお、この分布は**プランク分布**という。

黒体放射のスペクトル: 温度 T の物体と熱平衡にある輻射場のスペクトル(幅広い波長分布を持つ電磁波の集まり)

また、水素燃焼状態にある構成の表面温度は、その質量にほぼ一意的に依存し、重い恒星ほど温度が高く、光度が高い。

同じ質量の恒星ではスペクトル、光度がほぼ同じである。

光度が L [J/s] の恒星を観察したとき、単位時間、単位面積あたりのエネルギー流量 f [J/s/m²] は $f = \frac{L}{4\pi d^2}$ とあり、変形

すると、距離 $d = \sqrt{\frac{L}{4\pi f}}$ と表せることを考えると、

同じ質量の恒星のエネルギー流量を測定することで、距離の比がわかり、その恒星のうちもっとも地球に近い恒星が年周視差の方法 (§ 2.2 の方法) で求められていれば、これらの恒星の距離がわかるということである。

- ・問題点: 現実には同じ質量の恒星はなかなか見つからない。ここでさらに HR 図の概念を導入して考える。

HR 図: 散開星団について、縦軸に等級、横軸に表面温度をとってプロットした図。

見かけの**等級**と**絶対等級**の概念について

$$\text{定義: 絶対等級 } M = 4.7 - 2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_\odot} \right)$$

(L : ある天体の光度、 L_\odot : 太陽の光度)

注) 太陽の光度の記号はパソコンで出てこなかったため、似た記号で代用しています。教員の配布したプリントで正しい記号を確認するようにしてください。

$$\text{定義: 見かけの等級 } m = M + 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10} \right)$$

(d の単位は [pc] である)

我々が観測できるのは見かけの等級である。また、等級を波長別にあらわす場合もあるが、ここでは全波長に対して合計した光度から決定されるものである。

色指数 ($B-V$): 青色光と可視光線の強さの比
色指数が分かれば、温度は推定できる。

$$T[\text{K}] \approx \frac{7300}{B-V+0.73}$$

HR 図は、どの散開星団でもほぼ同じ形だが、散開星団ごとに距離が違って見かけの明るさが違うため、縦軸方向のずれが生じる。このずれから相対的距離比が計算できる。そして、近傍の散開星団 (Hyades や Pleiades) は年周視差を用いて距離が測定できるので、この方法を用いると、遠方の散開星団までの距離も分かる。

§ 2.4 距離梯子 (セファイド変光星)

- ・**セファイド変光星**: 振動によって星の表面積が変化し、明るさが周期的に変わる恒星。1kpc くらいまで観測範囲を拡大すると観測される散開星団の中の円盤銀河に含まれる場合がある。

特徴: 周期は 1 ~ 100 日程度。
周期が長い恒星は非常に明るい。

変光周期 P と最大光度 L の間に $L \propto P^{0.9}$ の関係非常にばらつきが小さい。

これらの特徴には理論的裏づけがある。

- ・セファイド変光星を用いた距離測定: 20Mpc までが対象。
理由: ハッブル望遠鏡を用いるが、この望遠鏡の分解能の限界により、分解能の向上により、この限界がさらに伸びる可能性はある。
- ・方法: $L \propto P^{0.9}$ の関係から、 P を測定することで L が求まる。また、単位時間、単位面積あたりのエネルギー流量 f は測定できるので、あとは § 2.3 の方法で距離が分かる。
- ・セファイド変光星の重要性: 非常に明るいことによって、遠方であっても観測できるのである。明るさについては最大光度が太陽の 10 ~ 100 万倍だということである。

§ 2.5 距離梯子 (タリー・フィッシャー関係)

- ・**タリー・フィッシャー関係**: 円盤銀河の円盤部分の恒星やガスは円運動しているが、その回転速度 V と銀河の光度 L の間には大まかに

$$L \propto V^{4.5}$$

が成り立つ。(理論的説明はなされていない) タリーとフィッシャーが発見。

- ・タリー・フィッシャー関係を用いた距離測定
: 理論的説明はなされていないし、ばらつきが大きいため、精度は落ちる。 V はドップラー効果を用いて測定する。 L が求められるので、 f を観測すれば前項のように距離が求まる。
数 1000Mpc まで用いることが可能。

§ 2.6 距離梯子 (Ia型超新星)

- ・Ia 型超新星爆発: 白色矮星にガスが降り積り、質量が 1.4 太陽質量を越えたときに星全体が不安定になって爆発する。

特徴: 比較的個性が少なく、どの爆発も同じような経過をたどって起こる。つまり、光度や光度の変化曲線はどれも同じなので、見かけの明るさで距離が推定できる。

難点: 超新星爆発は突発的な現象である。また、上記の特徴について理論的な説明がされているわけではない。

数 1000Mpc まで用いることが可能。

§ 2.7 距離梯子 (赤方偏移)

- ・ハッブルの法則(後述)を用いる方法: 約 4000Mpc まで。

$$\text{・赤方偏移 } z = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1$$

(λ : 地上で静止した状態で測定、

λ_0 : 遠方銀河からのやってきた光の波長の観測値)

- ・ハッブルの法則では $z \approx \frac{Hl}{c}$ が成り立ち、 H はハッブル定数で、最近の観測値は約 70km/s/Mpc(誤差約 10%) であるため、

$$l \approx 400 \text{ Mpc} \left(\frac{z}{0.1} \right) \left(\frac{H}{70 \text{ km/s/Mpc}} \right)^{-1}$$

となる。

- ・難点: 証明がされていない。 z がおよそ 1 以上では成り立たない。

§ 3 膨張宇宙モデルと現在の宇宙年齢

§ 3.1 ハッブルの法則

ハッブルは様々な銀河を観測(当然、精度面で誤差は多かった) 銀河の発する輝線はたいてい赤方偏移していた 大半の銀河は我々から遠ざかっている 宇宙が膨張しているという証拠として提示(1929年) 遠ざかる速さは距離にほぼ比例。 距離が違って方向に依らず、宇宙は等方一様に膨張

この比例定数をハッブル定数といい、ハッブルの観測によると、これは $H = \frac{V}{L} \sim 500[\text{km/s/Mpc}]$ である。しかし、1996年の観測では 60~65[km/s/Mpc]と測定され、現在は 70[km/s/Mpc]と測定されている。

ハッブルの観測の問題点

銀河までの距離の測定にセファイド変光星を用いたつもりであったが、RRライリという別の変光星を同一視して大幅に距離を見積もり誤った。この観測はセファイド変光星による距離測定法発見の10~20年後であった。また、他にも要因はあるが、この講義では割愛。系統的な間違いであったため、「速さが距離に比例する」というこれ自体の発見は評価できるものであった。

一般相対論の基礎方程式であるアインシュタイン方程式の解の中には、フリードマン・ロバートソン・ウォーカー解という、一様等方に膨張する宇宙に関する解が都合よく存在し、宇宙の膨張を理論的にうまく説明できる。

§ 3.2 宇宙原理

銀河は我々から一様に遠ざかり、一様の密度で分布している。我々が宇宙の中心に存在すると仮定するのはあまりに不自然。

宇宙原理: 宇宙は一様かつ等方で、原点をどこにとって周りを眺めようとも同じように見える。 宇宙のあらゆる場所は等価である。

原理: 証明はできないが、どうも成り立っているらしい事実。なお、宇宙内の星や銀河がまばらに存在することから一様ということに違和感があるかもしれないが、ここでいう一様とは、大きいスケールで見たときに平均的に一様であるということである。

また、太陽 - 地球間のような統一された系では、その距離は遠ざかってははいない。

時代を遡るといずれば1点になるため、宇宙の年齢がわかる。

§ 3.3 ニュートン重力理論における膨張宇宙モデル

膨張宇宙を理論的に正確に記述するには、一般相対論的は扱いが必要であるが、ニュートン重力理論でも近似的に基本的な性質は十分理解できる。

一様なダスト(圧力のない理想的なガス。ここでは銀河を1つの質点とみなし、その集まりとする。)が空間に球対称に満ちていると考える。圧力は0であり、密度は $\rho(t)$ の関数)とおく。また、宇宙は現在膨張しているので、 ρ は減少関数である。

膨張の中心(原点)は宇宙原理より任意に選ぶことができる。この球対称の球の質量を $M(r)$ とすると、(r は球半径)

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho x^2 dx = \frac{4\pi}{3} \rho(t) r^3$$

ここで、質量 M の球を考え、この球殻上に質点 m があるとする。この質点が動径方向にしか動かないとすると、

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2} \quad (\text{万有引力}) \dots$$

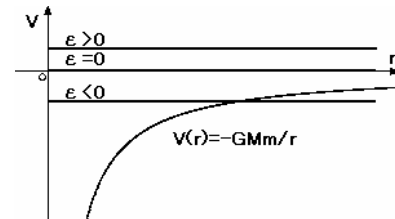
いろいろな重力点が考えられるが、球対称である場合は、1つのみについて注目すればよい。万有引力は球内の密度分布によらず、質量と球の半径のみによって決まる。また、距離と質量の関係を考えると、球外の重力は打ち消しあい、 M は球の内側についてののみ考えればよい。

【 の運動方程式の解き方】

1. 両辺に $\frac{dr}{dt}$ をかける。 $m \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{dr}{dt} \frac{GMm}{r^2}$
2. $\frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]$ および $\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{r} \right]$ より $\frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{GMm}{r} \right]$
3. 両辺 t で積分して $\frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{GMm}{r} + \varepsilon$ (定数)

この式で、 $V(r) = -\frac{GMm}{r}$ はポテンシャルエネルギーを表す。

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \varepsilon - V(r) \quad (\geq 0)$$



上式の左辺を見ると分かるとおり、 $-V(r)$ は0より大きくなくてはならない。つまり、 $V(r)$ でなくてはならない。

ここで、上のグラフを見ると ε の値によって宇宙の膨張がやがてどうなるかが分かる。

- ・ > 0 のとき、 $\frac{dr}{dt}$ は次第に小さくなり、一定値 $\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$ になる。
- ・ $= 0$ のとき、 $\frac{dr}{dt}$ は次第に小さくなり、最終的に0になる。
- ・ < 0 のとき、 $\frac{dr}{dt}$ は次第に小さくなり、やがて負に転じる。

次に、この膨張宇宙モデルを十分に薄い球殻だとし、これが順番を保ちながら外側に運動していると考え、このとき、 i 番目の球殻(質量 m_i)の内側に質量 M_i が含まれているとすると、上式と同様に、

$$\frac{m_i}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{GM_i m_i}{r} + \varepsilon_i \dots$$

が成り立つ。ここで、球殻は一様に膨張しているから $r = a(t)q_i$ と表せる。ここで、 $a(t)$ は宇宙のスケール因子(無次元量)といい、現在の時間を t_0 とすると $a = a_0$ である。また、 q_i は $a=1$ のときの球殻の半径を表す定数である。

ちなみに、 M_i は次のような式で求める。(期末試験頻出)

$$M_i = \int_0^{r_i} \rho(r) 4\pi r^2 dr = \rho \int_0^{r_i} 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi r_i^3}{3} \rho = \frac{4\pi a^3}{3} q_i^3 \rho$$

宇宙の密度は一様であることを明示するのである。

r, M_i を代入して は次のように書き換えることができる。

$$\frac{m_i}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 q_i^2 = \frac{4\pi G m_i q_i^2}{3} \rho(t) a(t)^2 + \varepsilon_i$$

これを变形して、

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) a(t)^2 + \frac{2\varepsilon_i}{m_i q_i^2}$$

ここで、最後の項は、宇宙膨張を支配する値であるといえる。よって、

この値を $-Kc^2$ とおく。

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) a(t)^2 - Kc^2$$

この K は曲率といい、一般相対論では宇宙の曲がり具合を決定する値であるが、ニュートン重力理論では単なる定数と見てよい。なお、次元は $[L^{-2}]$ である。

さて、ここで $M_i = \frac{4\pi r_i^2}{3} \rho(t) a(t)^3$ が一定であることより、

$\rho(t) a(t)^3$ は定数である。よって、 $\rho(t) a(t)^3 = \rho_0 a_0^3$ として、

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a(t)} - Kc^2 \dots$$

と表せる。この一階常微分方程式を解くことになる。

・ハッブルパラメータ $H(t) = \frac{1}{a(t)} \frac{da}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = \frac{v}{r}$

現在の値をハッブル定数 H_0 という。

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a(t)^3} - \frac{Kc^2}{a(t)^2}$$

$$t=t_0 \text{ のとき, } H_0^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3} - \frac{Kc^2}{a_0^2}$$

ここで無次元密度パラメータ Ω_0 を定義できる。

$$\text{定義: } \Omega_0 \equiv \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2} = 1 + \frac{Kc^2}{H_0^2 a_0^2}$$

この値は、 H_0 と ρ_0 が分かれば求まる。よって、 K のかわりにしばしば採用される。 K が正か、ゼロか、負かは、 Ω_0 が 1 超か、1 か、1 未満かに対応する。ここで、 $\Omega_0=1$ の場合の密度 ρ_0 を **宇宙の臨界密度** ρ_c という。

$$\text{定義: } \rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

さて、本題の の解き方であるが、

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a(t)} - Kc^2 \dots$$

の K の値によって若干結果が異なる。

まず、 $K=0$ のとき、 $\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a(t)}$ を次のように変形する。

$$\sqrt{a(t)} da = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3}} dt$$

(両辺の平方根をとり、両辺に $\sqrt{a(t)} dt$ をかける。)

そして、両辺を積分すると、

$$\frac{2}{3} a(t)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3}} t + C \quad (C \text{ は初期条件で決まる定数})$$

宇宙誕生時刻 $t=0$ において、宇宙は一点に収縮して $a=0$ とすると、 $C=0$ になる。

$$a(t) = a_0 \left(\frac{8\pi G \rho_0}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3t}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = a_0 \left(\frac{3H_0 t}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

と変形できることより、 $K=0$ のとき、宇宙は永遠に膨張(膨張加速度負であり、減速膨張)する。現在 $t=t_0$ とすると $a(t)=a_0$ より、

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}$$

ハッブル定数の最近の観測値は約 70km/s/Mpc(誤差約 10%) であるため (§ 2.7 参照)、 t_0 90億年 と求まる。

さて、 $K \neq 0$ の場合について考える。

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a(t)} - Kc^2$$

を次のように変形する。

$$\left[\frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a(t)} - Kc^2\right]^{\frac{1}{2}} da = dt$$

これを両辺積分すれば、

$$\int_0^a \left[\frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a(t)} - Kc^2\right]^{\frac{1}{2}} da = t + C$$

C は初期条件によって決まる積分定数だが、 $t=0$ で $a=0$ とすれば $C=0$ である。つまり、

$$\int_0^a \left[\frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a(t)} - Kc^2\right]^{\frac{1}{2}} da = t \dots$$

ここで、 $K < 0$ のとき、媒介変数 θ を用いて、

$$a = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3|K|c^2} \sinh^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3|K|c^2} (\cosh\theta - 1)$$

とおくと ($\sinh\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$, $\cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$ のこと)、 の左辺について、

$$\begin{aligned} & \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a} - Kc^2 \\ &= \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3 \frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3|K|c^2} (\cosh\theta - 1)} - Kc^2 = \frac{2|K|c^2}{\cosh\theta - 1} - Kc^2 \\ &= \frac{2|K|c^2}{\cosh\theta - 1} + |K|c^2 = \frac{\cosh\theta + 1}{\cosh\theta - 1} |K|c^2 \\ &= \frac{\sinh^2\theta}{(\cosh\theta - 1)^2} |K|c^2 \end{aligned}$$

および、

$$\frac{da}{d\theta} = -\frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3|K|c^2} \sinh\theta$$

より、 の左辺は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} & \int_0^a \left[\frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a(t)} - Kc^2\right]^{\frac{1}{2}} da \\ &= \int_0^\theta \left(-\frac{\cosh\theta - 1}{\sqrt{|K|c^2} \sinh\theta}\right) \left(-\frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3|K|c^2}\right) \sinh\theta d\theta \\ &= \frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3|K|^{\frac{3}{2}} c^3} (\sinh\theta - \theta) \end{aligned}$$

$$\text{つまり、} \quad t = \frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3|K|^{\frac{3}{2}} c^3} (\sinh\theta - \theta)$$

この場合、 $0 \leq \theta < \infty$ であり、 $\theta \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ かつ $a \rightarrow \infty$ であるので、宇宙は永遠に膨張し続ける(減速膨張)。宇宙年齢については、 $K \rightarrow 0$ と $K \rightarrow \infty$ の極限をとることで、その範囲が求まる。

$K \rightarrow 0$ では、 $K=0$ と同様に $t_0 = \frac{2}{3H_0}$

$K \rightarrow \infty$ では、

現在では時間が十分にたっているとして、

$$\sinh\theta \approx \frac{e^\theta}{2} \gg \theta \gg 1, \cosh\theta \approx \frac{e^\theta}{2} \gg 1 \text{ で、}$$

ρ_0 が十分に小さいと仮定する。

すると、次のような式ができる。

$$H_0 t = \frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3|K|^{\frac{3}{2}} c^3} \left(\frac{8\pi G \rho_0}{3} - \frac{Kc^2}{a_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} (\sinh \theta - \theta)$$

$$\approx \frac{4\pi G \rho_0 a_0^2}{3|K|c^2} (\sinh \theta - \theta) \approx \frac{2\pi G \rho_0 a_0^2}{3|K|c^2} e^\theta$$

また、

$$a = \frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3|K|c^2} (\cosh \theta - 1)$$

$$\approx \frac{2\pi G \rho_0 a_0^3}{3|K|c^2} e^\theta$$

であることから、 $a \approx a_0 H_0 t$ となるので、現在 $t_0 = \frac{1}{H_0}$ である。

つまり、 $K < 0$ のとき、 $\frac{2}{3H_0} < t_0 < \frac{1}{H_0}$

$K > 0$ の場合は、媒介変数 θ を用いて、

$$a = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3Kc^2} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3Kc^2} (1 - \cos \theta)$$

とおくと、の左辺

$$\frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a} - Kc^2 = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3 \frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3Kc^2} (1 - \cos \theta)} - Kc^2 = \frac{2Kc^2}{1 - \cos \theta} - Kc^2$$

$$= \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} Kc^2 = \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} Kc^2$$

および、

$$\frac{da}{d\theta} = \frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3Kc^2} \sin \theta$$

より、の左辺は次のように計算できる。

$$\int_0^a \left[\frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a(t)} - Kc^2 \right]^{\frac{1}{2}} da$$

$$= \int_0^\theta \frac{1 - \cos \theta}{\sqrt{Kc^2 \sin \theta}} \frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3Kc^2} \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3K^{\frac{3}{2}} c^3} (\theta - \sin \theta)$$

つまり、 $t = \frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3K^{\frac{3}{2}} c^3} (\theta - \sin \theta)$

この場合、 $0 \leq \theta < 2\pi$ であり、 $\theta = \pi$ のとき宇宙は最大膨張に達して収縮をはじめ、 $\theta = 2\pi$ のとき再び $a = 0$ になる。宇宙年齢について、 $K \rightarrow 0$ では、 $K = 0$ と同様に $t_0 = \frac{2}{3H_0}$ となる。現在は膨張の

途中であるので、 $K > 0$ のとき、 $0 < t_0 < \frac{2}{3H_0}$

これまで見てきたように、ニュートン重力理論において宇宙年齢を決定するには、ハッブル定数と K の値を決定する必要がある。

§ 3.4 オルバースのパラドックス

キリスト教的考えで、宇宙は無限に広く不変だという常識があった。しかしながら、仮に宇宙が無限に広く不変であるとする、夜空は無限に明るくなくてはならない。これが**オルバースのパラドックス**である。

光度 L の光源が、一様に無限等方まで存在しているとする。われわれから距離 r にある天体からやってくる光の、単位面積、単位時間あたりのエネルギー流量は、

$$f = \frac{L}{4\pi r^2}$$

と表されることより、単位体積あたりの光源数を n とすると、ある立体角度 Ω の方角からの光のエネルギー流量は、

$$\int_0^\infty f n \Omega r^2 dr = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Omega}{4\pi} L n r \rightarrow \infty$$

となるのである。

このパラドックスを解決するには、宇宙が膨張しているとすれば問題ない。膨張宇宙論においては、宇宙の年齢は有限であり、現在の宇宙年齢を t とすれば、 $r = ct$ の範囲の天体しか観測できない、つまり有限になる。

§ 3.5 相対論的宇宙論

§ 3.3 で扱った内容は、あくまでもニュートン重力理論に基づいたものである。しかしながら、厳密な議論には一般相対論的に扱わなければならない。

ニュートン理論では空間はユークリッド的であり、曲がってはいない。また、物質が膨張しているのであって、空間が膨張しているのではない。一般相対論では、空間そのものが曲がったり、膨張したりすることが大前提となる。一般相対論では、 K の値が 0 でないとき、空間は曲がっている(2次元的に考えると、 $K = 0$ では平面、 $K > 0$ では球面、 $K < 0$ では双曲面)。いずれにしても宇宙の端は存在しない。 $K > 0$ では体積は有限であるが、それ以外では体積は無限大である。

一般相対論においても、 $\left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) a(t)^2 - Kc^2$ は成り立つ。

しかし、ニュートン重力理論と異なる点は、一般相対論の場合には、ダストではなく圧力を持つ物質からなる場合に変更を受け、**宇宙項**(真空の持つエネルギー)という特有の定数を付け加える自由度が存在する。圧力の効果は宇宙の初期のみで宇宙年齢にそれほど影響はないが、宇宙項は大きく影響する。スケール因子の時間変化に宇宙項 (> 0) を導入すると、

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) a(t)^2 - Kc^2 + \frac{\Lambda c^2}{3} a^2 \dots$$

宇宙項の次元は $[L^2]$ である。この宇宙項に必然性がなく、理由は現在も説明できていない。値が大きいくほど現在の宇宙年齢は大きくなる。ちなみに、宇宙項の真空の持つエネルギーとは、非常に小さく、普段は無視できるが、宇宙全体で積分したときに現れる程度のものであると考えられる。

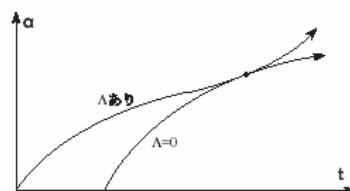
の右辺について、一番左の項は宇宙の初期に効く項で、宇宙項を含む項は十分膨張が進んでから効く項である。左の項は、 ρa^3 が実際には一定であるので、実際には a^{-1} に比例するのである。

さて、膨張が十分進むと、 $\left(\frac{da}{dt} \right)^2 \approx \frac{\Lambda c^2}{3} a^2$ すなわち

$$\frac{da}{dt} \approx \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} a$$

$$a(t) = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct}$$

という加速膨張の式が得られる。



の両辺を $H_0^2 a_0^2$ で割ってみると、

$$\frac{1}{H_0^2 a_0^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2} \left(\frac{a^0}{a} \right)^2 - \frac{Kc^2}{H_0^2 a_0^2} + \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \left(\frac{a}{a_0} \right)^2$$

ここで3つの無次元定数を定義する

$$\Omega_0 \equiv \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2} \quad \Omega_K \equiv -\frac{Kc^2}{h_0^2 a_0^2} \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$$

上の式に、現在の値 $a = a_0$, $\left(\frac{da}{dt} \right)_0 = H_0 a_0$ を代入すれば、

$$1 = \Omega_0 + \Omega_K + \Omega_\Lambda$$

が得られる。

$K=0$ のとき、 $\Omega_K=0$ である。これは観測的にも支持がある仮定である。現在が $\Omega_0 < 1$ ならば、加速膨張に転じていることになる。さて、このとき、 $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_0$ であることより、 $x = \left(\frac{a}{a_0} \right)^2$ とおくと、式

は次のように表せる。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3H_0}{2} \sqrt{1 - \Omega_\Lambda + \Omega_\Lambda x^2}$$

これを積分すればよい。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_\Lambda + \Omega_\Lambda x^2}} dx = \int_0^{t_0} \frac{3H_0}{2} dt$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Omega_\Lambda}{1 - \Omega_\Lambda} x^2}} dx = \int_0^{t_0} \frac{3\sqrt{1 - \Omega_\Lambda} H_0}{2} dt$$

$x = \frac{1 - \Omega_\Lambda}{\Omega_\Lambda} \tan^2 \theta$ とおくと、 $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1 - \Omega_\Lambda}{\Omega_\Lambda} \frac{1}{\cos^2 \theta}$ より、

$$\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \int_0^{t_0} \frac{3\sqrt{1 - \Omega_\Lambda} H_0}{2} dt$$

(θ_0 は $\tan \theta_0 = \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{1 - \Omega_\Lambda}}$, $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ をみたす値)

$$\int_0^{\theta_0} \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{t_0} \frac{3\sqrt{1 - \Omega_\Lambda} H_0}{2} dt$$

$y = \sin \theta$ とおくと、 $\frac{dy}{d\theta} = \cos \theta$ より、

$$\int_0^{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \frac{1}{1 - y^2} dy = \int_0^{t_0} \frac{3\sqrt{1 - \Omega_\Lambda} H_0}{2} dt$$

$$\int_0^{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \left(\frac{1}{1 + y} + \frac{1}{1 - y} \right) dy = \int_0^{t_0} \frac{3\sqrt{1 - \Omega_\Lambda} H_0}{2} dt$$

$$\left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right) \right]_0^{\sqrt{\Omega_\Lambda}} = \left[\frac{3\sqrt{1 - \Omega_\Lambda} H_0}{2} t \right]_0^{t_0}$$

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{\Omega_\Lambda}}{1 - \sqrt{\Omega_\Lambda}} \right) = \frac{3\sqrt{1 - \Omega_\Lambda} H_0}{2} t_0$$

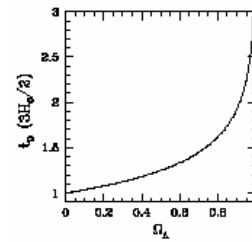
$$\frac{1}{2} \log \left[\frac{(1 + \sqrt{\Omega_\Lambda})^2}{1 - \Omega_\Lambda} \right] = \frac{3\sqrt{1 - \Omega_\Lambda} H_0}{2} t_0$$

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{1 - \Omega_\Lambda}} \right)^2 = \frac{3\sqrt{1 - \Omega_\Lambda} H_0}{2} t_0$$

$$\log \left(\frac{1 + \sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{1 - \Omega_\Lambda}} \right) = \frac{3\sqrt{1 - \Omega_\Lambda} H_0}{2} t_0$$

$$\therefore t_0 = \frac{2}{3\sqrt{1 - \Omega_\Lambda} H_0} \log \left(\frac{1 + \sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{1 - \Omega_\Lambda}} \right)$$

宇宙項の大きさと現在の宇宙年齢の関係はこのようになる。



コンピュータを用いて計算し、実際の観測結果と比較すると、(Ω_0, Ω_K) (0.3, 0, 0.7)程度であるようである。

さて、 Ω_Λ をつぎのように書き換えてみる。

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^2 = E - V(a)$$

ここで、 $E = -Kc^2$ (定数), $V(a) = -\frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a} - \frac{\Lambda c^2}{3} a^2$ である。

左辺は正の量なので、右辺も正の量である。ここで、 $V(a)$ の最大値 $V(a_{max})$ と E の大小関係によって宇宙の将来を考えることができる。ちなみに、 a_{max} とは、 $V(a)$ が最大となるときの a の値のことであり、 a の最大値ではない。そして、この値は次のように求めることができる。

$$V'(a) = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3a^2} - \frac{2\Lambda c^2}{3} a \quad \text{に} \quad V'(a) = 0 \quad \text{を代入}$$

このとき、 $a = a_0 \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0}{\Lambda c^2}}$ と求まる。

本題の $V(a_{max})$ と E の大小関係について、

- (i) $V(a_{max}) < E$: 宇宙は永遠に膨張。減速膨張から加速膨張に転ずる。
- (ii) $V(a_{max}) = E$: 宇宙は減速膨張し、 $t \rightarrow \infty$ で a は収束する。
- (iii) $V(a_{max}) > E$: 減速膨張し、やがて収縮に転ずる。

§ 3.6 ハッブル定数の測定

求め方：銀河の後退速度を距離で割ればよい。

銀河の後退速度はドップラー効果を用いる。

$$\frac{dr}{dt} = zc$$

$$\text{赤方偏移} \quad z = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1$$

(λ : 地上で静止した状態(静止系)で測定、

λ_0 : 遠方銀河からのやってきた光の波長の観測値)

現在、最も信頼できる測定値は、乙女座銀河団内の銀河に存在するセファイド変光星を用いて決定されている(観測はハッブル宇宙望遠鏡)。

$$H_0 = 72 \pm 10 \text{ km / sec / Mpc}$$

このとき、臨界密度は、

$$\rho_c \approx 10^{-29} \text{ g / cm}^3 \quad (\text{現在の宇宙の平均密度の目安})$$

我々が観測できる宇宙の限界は、

$$L = \frac{2c}{3H_0} = 2.8 \times 10^3 \text{ Mpc}$$

ただし、最近の観測によると、宇宙の年齢はおよそ135億年なので、 L は約4000Mpcほどになる。

§ 3.7 曲率や宇宙項の測定

正確にスケール因子の変化や宇宙年齢を知るためには曲率 K や宇宙項 Λ の値を求めなくてはならない。

遠方銀河からの光は昔に発射されたものであることを利用すると、遠方の天体を多数観測することにより、距離と赤方偏移の関係や、天体の個数密度と赤方偏移の関係を導出し、それに合うように K ,